$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$$

$$=$$

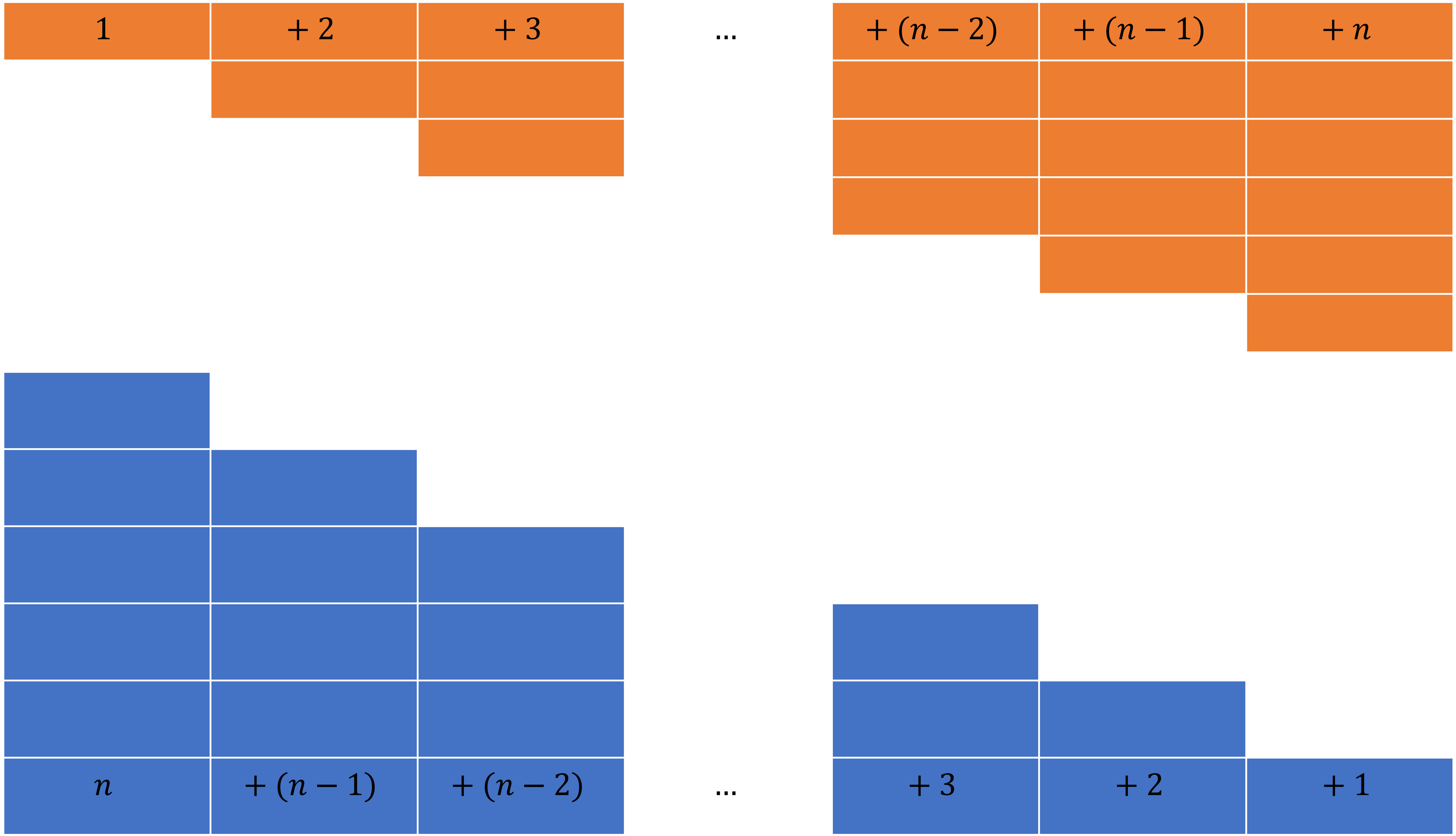
$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

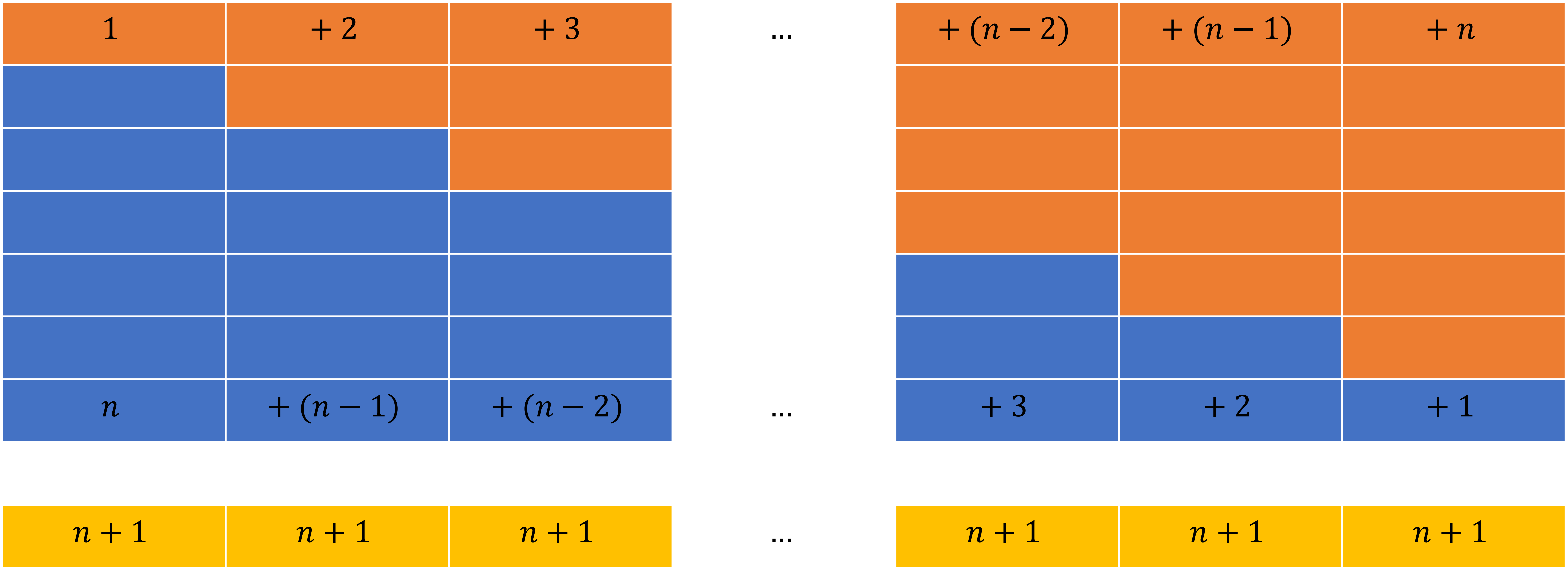
1	$+\,2$	$+\,3$	…	$+\,(n-2)$	$+\,(n-1)$	$+n$
n	$+\,(n-1)$	$+\,(n-2)$	…	$+\,3$	$+\,2$	$+\,1$

$$1 \quad +2 \quad +3 \quad \ldots \quad +(n-2) \quad +(n-1) \quad +n$$

$$n \quad +(n-1) \quad +(n-2) \quad \ldots \quad +3 \quad +2 \quad +1$$



1
$+ 2$
$+ 3$
…
$+ (n-2)$
$+ (n-1)$
$+ n$
n
$+ (n-1)$
$+ (n-2)$
…
$+ 3$
$+ 2$
$+ 1$



$$2[1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n] = n(n+1)$$

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1) \quad \blacksquare$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$$

			1			
		2		2		
		3	3	3		
	…	…	…	…		
	n-2	n-2	n-2	n-2	n-2	
n-1	n-1	n-1	n-1	n-1	n-1	
n	n	n	n	n	n	n

n

n-1 n

n-2 n-1 n

… n-2 n-1 n

3 … n-2 n-1 n

2 3 … n-2 n-1 n

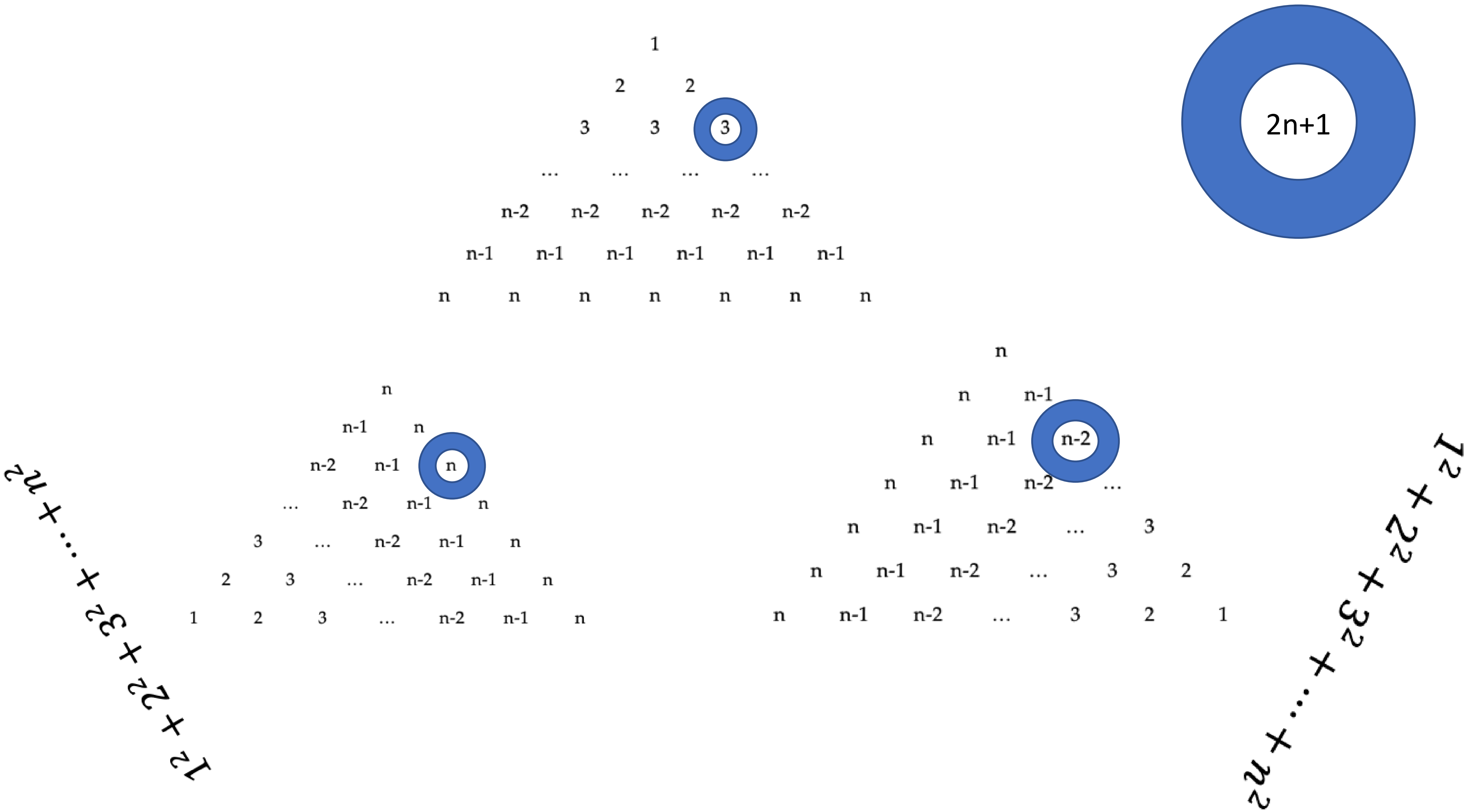
1 2 3 … n-2 n-1 n

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$

n						
n	n-1					
n	n-1	n-2				
n	n-1	n-2	…			
n	n-1	n-2	…	3		
n	n-1	n-2	…	3	2	
n	n-1	n-2	…	3	2	1

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$$



$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$$

2n+1

2n+1 2n+1

2n+1 2n+1 2n+1

… … … …

2n+1 … … 2n+1

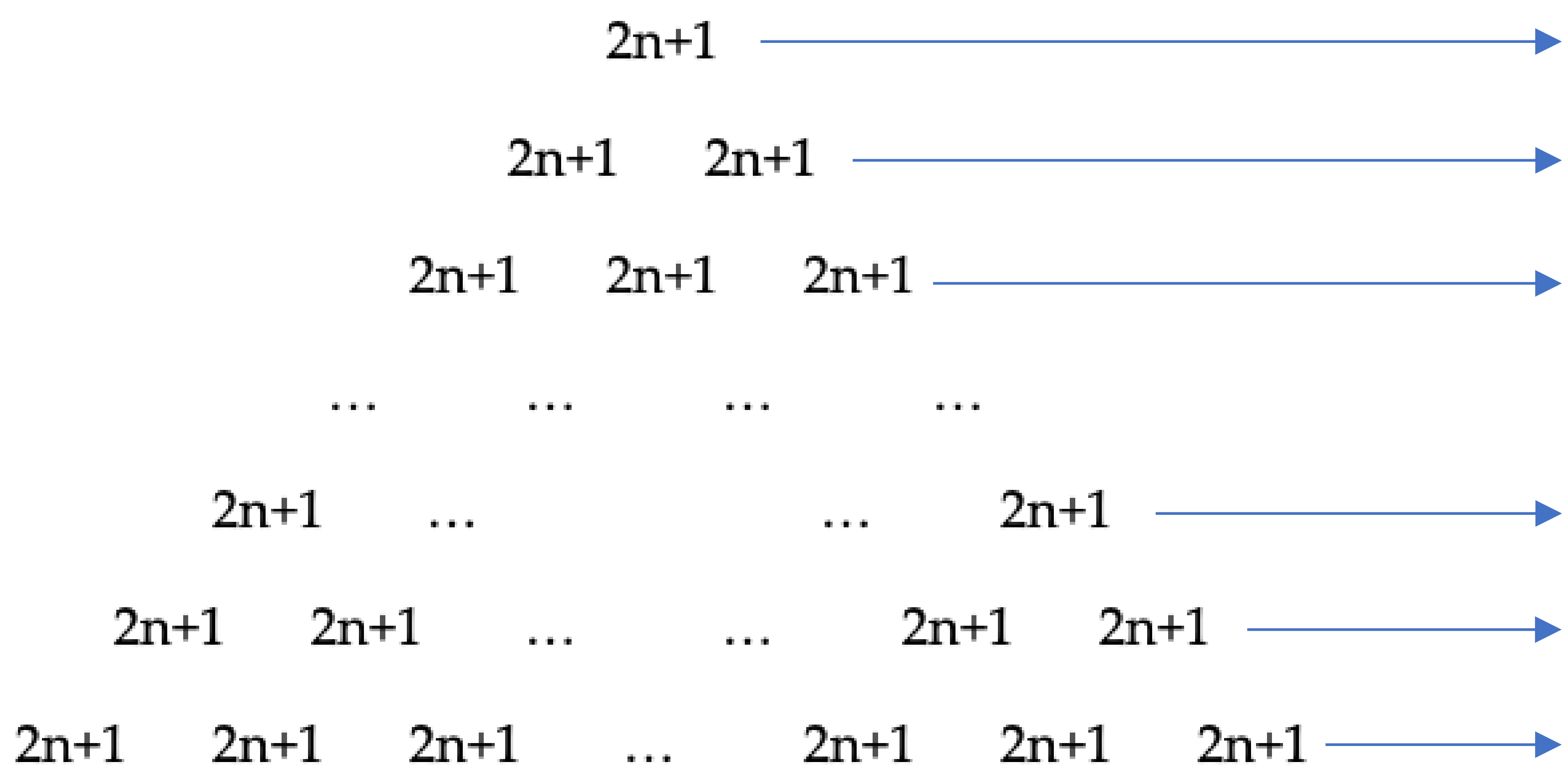
2n+1 2n+1 … … 2n+1 2n+1

2n+1 2n+1 2n+1 … 2n+1 2n+1 2n+1

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$

$$3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) =$$



$$1(2n + 1) +$$

$$2(2n + 1) +$$

$$3(2n + 1) +$$

…

$$(n - 2)(2n + 1) +$$

$$(n - 1)(2n + 1) +$$

$$n(2n + 1)$$

$$= \frac{n(n + 1)}{2} \times (2n + 1)$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \blacksquare$$